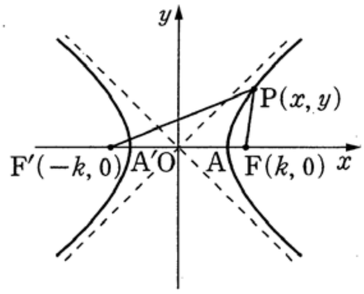
4. 쌍곡선

1. 쌍곡선의 정의 및 기본 성질

(1) 쌍곡선의 정의

두 정점으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 자취



두 정점 F, F'를 쌍곡선의 초점, A, A'를 쌍곡선의 꼭지점, AA'를 쌍곡선의 주축, AA'의 중점 O를 쌍곡선의 중심, 그림의 점선처럼 쌍곡선이 한없이 가까워지는 직선을 쌍곡선의 점근선이라 한다.

(2) 쌍곡선의 방정식

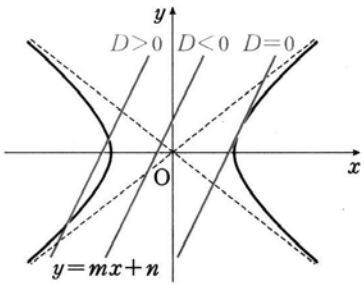
① 두 초점 $F(k,\ 0)$, $F'(-k,\ 0)$으로 부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $k^2=a^2+b^2$)

② 두 초점 $F(0,\ k)$, $F'(0,\ -k)$으로 부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ (단, $k^2=a^2+b^2$)

(3) 쌍곡선에 접하는 접선의 방정식



① 기울기가 m이고 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 접선의 방정식 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $m\neq\pm\dfrac{b}{a}$)

② 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

2. 자취를 통해 본 쌍곡선

(1) 쌍곡선의 자취 1

한 정직선과 한 정점으로부터 거리의 비가 $1:e$ (단, $e>1$) 인 점들의 자취는 쌍곡선이다.

(증명)

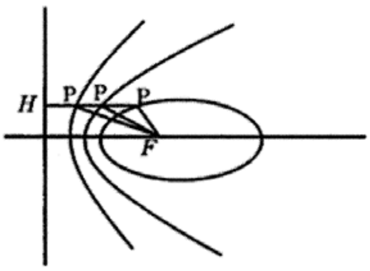
한 정직선 l을 $x=b$, 한 정점 F를 $F(a,\ 0)$라 하고 l과 F에 이르는 거리의 비가 $1:e$ (단, $e>1$) 인 점 P의 자취를 구해보자.

점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$라 하면 $|x-b|:\sqrt{(x-a)^2+y^2}=1:e$

이를 정리하면 $(x-a)^2+y^2=e^2(x-b)^2$

$(1-e^2)x^2-2(a-be^2)x+y^2+a^2-b^2e^2=0$

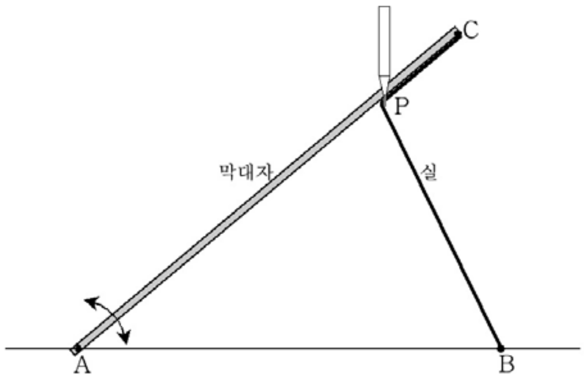
그런데 $1-e^2<0$ 이므로 이 방정식은 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0\ (AB<0)$ 쌍곡선의 방정식이 된다. 〈증명 끝〉



〈이심률에 따른 이차곡선〉

(2) 쌍곡선의 자취 2

막대 AC의 한 끝 C에 실을 고정시키고 실의 다른 한 끝을 한 점 B에 고정시킨 후, 연필을 이용하여 실을 팽팽하게 막대자로 붙인 채 A를 중심으로 막대를 회전시키면 연필이 그리는 점의 자취는 쌍곡선(의 일부)이다.



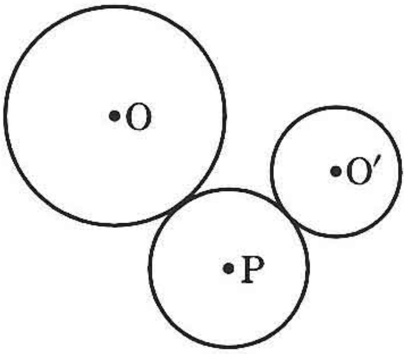
(증명)

그림에서 막대의 길이을 a, 실의 길이를 b라 하자. (단, $a>b$) 그러면 $AC=AP+PC=a$, $BP+PC=b$ 이다.

두 식을 빼면 $AP-BP=a-b$ (일정) 이르로 점 P는 A, B를 두 초점으로 하는 쌍곡선(의 일부)을 그린다. 〈증명 끝〉

(3) 쌍곡선의 자취 3

두 원에 동시에 외접하는 원의 중심의 자취 및 두 원 중 한 원에 외접하고 다른 원에 외접하는 원의 중심의 자취는 쌍곡선이다.



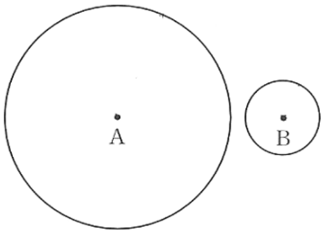
(증명)

두 원 $O,\ O'$의 반지름을 각각 $r,\ r'$, 두 원에 동시에 외접하는 원의 중심을 P, 그 반지름을 x라 하자.

$PO = r + x,\ PO' = r' + x$ 이므로 두 식을 빼면

$PO - PO' = r - r'$ (일정) 이다.

따라서 점 P는 두 원의 중심 $O,\ O'$를 초점으로 하는 쌍곡선을 그린다.



한편, 두 원 $A,\ B$의 반지름을 각각 $r,\ r'$, 원 A에 외접하고 원 B에 내접하는 원의 중심을 Q, 그 반지름을 y라 하자.

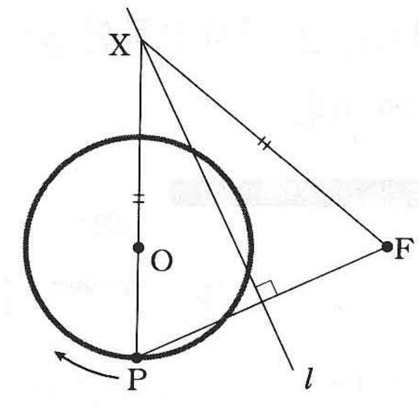
$QA = r + y,\ QB' = y - r'$ 이므로 두 식을 빼면

$QA - QB = r + r'$ (일정) 이다.

따라서 점 Q는 두 원의 중심 $A,\ B$를 초점으로 하는 쌍곡선을 그린다. ⟨증명 끝⟩

(4) 쌍곡선의 자취 4

원 O 밖의 한 정점을 F, 원 위의 동점을 P라 하고 선분 PF의 수직이등분선이 직선 PO와 만나는 점의 자취는 쌍곡선이다.



(증명)

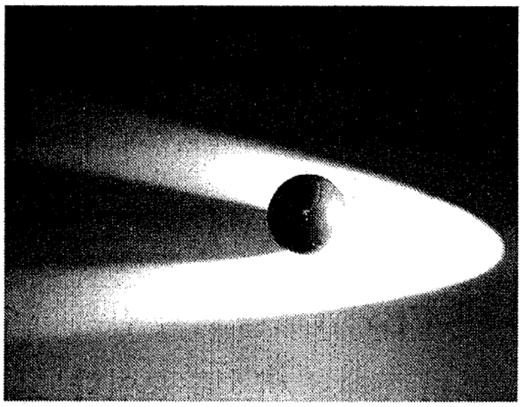
원 O의 반지름을 r (r은 상수)이라 하자.

위의 그림에서 $XF = XP = XO + OP$ 이므로 $XF - XO = OP = r$ (일정) 이다.

따라서 점 X의 자취는 점 F, O를 두 초점으로 하는 쌍곡선이다. 〈증명 끝〉

(5) 쌍곡선의 자취 5

그림과 같이 구의 높이보다 낮은 위치에서 불을 비추면 구의 그림자 모양은 쌍곡선이다.



(증명)

반지름은 r인 구를 좌표공간에 적절히 놓아두자. 중심을 $O(0,\ 0,\ r)$, 빛의 위치(구 밖의 한 점)를 $A(a,\ 0,\ b)$ (단, $b<2r$) 라 하자. 빛의 위치의 y 좌표를 0 으로 놓는 것은 x 축과 평행한 방향으로 빛을 비춘다는 의미이다.

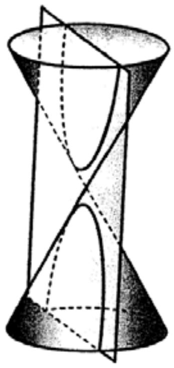
그림자 끝의 임의의 한 점을 $P(x,\ y,\ 0)$, $\overline{AP}$가 구와 접하는 점을 B, $\angle PAO=\Theta$라고 하고, xy 평면에 비추는 구의 그림자를 생각해보자.

일반적으로 $\overrightarrow{AP}\circ\overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AO}|\cos\Theta = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|$ 이 성립하므로

$(x-a,\ y,\ -b)\circ(-a,\ 0,\ r-b)=\sqrt{(x-a)^2+y^2+(-b)^2}\times\sqrt{(-a)^2+(r-b)^2-r^2}$ 가 된다.

이를 정리하면 $(b^2-2rb)x^2+(a^2+b^2-2rb)y^2+2abrx-b^2r^2=0$ ($C,\ D,\ E$는 상수)이 되는데, $b<2r$ 이므로 이는 쌍곡선의 일반형 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ (단, $AB<0$) 의 꼴이다. 따라서 그림자의 모양은 쌍곡선이 된다.

구보다 낮은 위치에서 비춘 구의 그림자의 모양이 타원이 되는 것은 원뿔곡선을 그림과 같이 밑면과 모선이 이루는 각보다 크게 잘랐을 때 쌍곡선이 생기는 것과 같은 이치이다. 빛의 위치는 원뿔의 꼭지점, 그림자가 생기는 면은 원뿔을 자른 면에 대응하게 되는 것이다. 〈증명 끝〉



(6) 쌍곡선의 자취 6

꼬인 위치에 있는 두 직선 중 한 직선을 축으로 해서 다른 직선을 회전시키면, 그 회전체의 축을 포함한 단면은 쌍곡선을 이룬다. (단, 두 직선은 수직이 아니다.)

(증명)
두 개의 직선을 적당히 이동하여 한 직선을 x축으로 하고 다른 직선을 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ 이라고 하자.

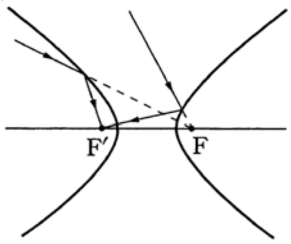
직선 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}=t$라 하고 직선위의 한 점은 다음과 같이 나타낼 수 있다. $P(x,y,z)=(lt+a,\ mt+b,\ nt+c)$ 점 P에서 x축에 내린 수선의 교점은 $A(lt+a,\ 0,\ 0)$이 된다. PA의 길이는 $\sqrt{(mt+b)^2+(nt+c)^2}$이므로 점 P를 x축 둘레로 회전했을 때 xy평면과 만나는 점은 $Q(lt+a,\ \sqrt{(mt+b)^2+(nt+c)^2},\ 0)$이 된다.

Q의 자취를 구하면 되므로 $x=lt+a,\ y=\sqrt{(mt+b)^2+(nt+c)^2}$에서 변수 t를 소거하면 된다. 그러면 $px^2+qx-y^2+r=0$ (단, $p>0$) 꼴이 되어 쌍곡선이 된다.
만약 두 직선이 수직이면 x축의 방향벡터와 다른 직선의 방향벡터 $(l,\ m,\ n)$이 수직이므로 $l=0$이다. $P(x,y,z)=(lt+a,\ mt+b,\ nt+c)$이므로 점 P를 x축 둘레로 회전했을 때 xy평면과 만나는 점은 $Q(a,\ \sqrt{(mt+b)^2+(nt+c)^2},\ 0)$이 된다. Q의 자취는 $x=a$ (단, y는 PA의 길이보다 크거나 같다.)이 되어 원 모양의 구멍이 뚫린 평면이 된다. 〈증명 끝〉

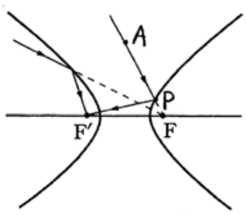
3. 쌍곡선의 기하학적 특성

(1) 쌍곡선의 기하학적 특성 1

쌍곡선의 한 초점을 향한 빛은 쌍곡선 위의 한 점에서 반사한 후 다른 초점을 향해 진행한다.



(증명1) 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한 증명



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 두 초점을 $F(k,\ 0),\ F'(-k,\ 0)$ 이라 하고, 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x_1,\ y_1)$ 라 하자. 그러면 $k^2=a^2+b^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ 이 성립한다.

점 P 에서의 접선의 방정식이 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ 이므로 접선의 x 절편을 Q 라 하면 Q 의 좌표는 $(\dfrac{a^2}{x_1},\ 0)$ 이다. 이 때, $PF':PF=QF':QF$ 이 성립함을 보이면 입사각과 반사각이 같으므로 쌍곡선의 한 초점을 향한 빛은 다른 초점을 향해 반사함을 알 수 있다.

$PF'=\sqrt{(x_1+k)^2+{y_1}^2}$, $PF=\sqrt{(x_1-k)^2+{y_1}^2}$, $QF'=k+\dfrac{a^2}{x_1}$, $QF=k-\dfrac{a^2}{x_1}$ 를

$PF':PF=QF':QF$ 에 대입하여 정리하면

$\sqrt{(x_1+k)^2+{y_1}^2}:\sqrt{(x_1-k)^2+{y_1}^2}=k+\dfrac{a^2}{x_1}:k-\dfrac{a^2}{x_1}$ 이다.

이를 간단히 하면

$(x_1^2+k^2+{y_1}^2-2kx_1)(k^2{x_1}^2+a^4+2ka^2x_1)=(x_1^2+k^2+{y_1}^2+2kx_1)(k^2{x_1}^2+a^4-2ka^2x_1)$

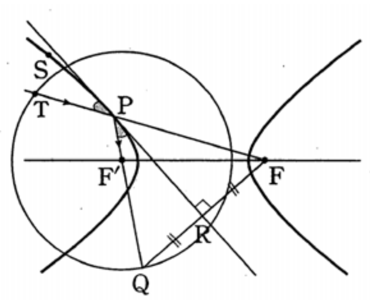
$\Leftrightarrow a^2({x_1}^2+k^2+{y_1}^2)=k^2{x_1}^2+a^4$

$\Leftrightarrow b^2{x_1}^2 - a^2{y_1}^2 - a^2b^2 = 0$ 이 되는데

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ 을 만족하므로 참임을 알 수 있다.

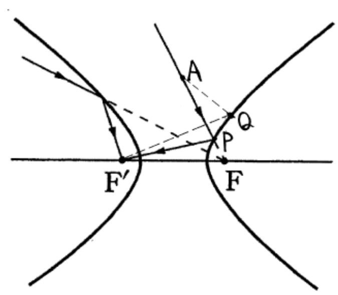
$PF' : PF = QF' : QF$ 이 성립하므로 위의 명제는 참이다. 〈증명 끝〉

(증명2) 쌍곡선의 자취를 이용한 증명



원 F' 위의 점 Q, 원 밖의 임의의 점 F에 대하여 선분FQ의 수직이등분선을 그으면 $PQ = PF\,(\because \triangle PQR \equiv \triangle FPR\,)$이므로 $PQ - PF' = PF - PF'$는 원의 반지름으로 일정하다. 따라서 점 P는 $F,\ F'$를 두 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점이다.
그림에서 $\angle SPT = \angle FPF'$이 성립하므로 쌍곡선의 한 초점을 향한 빛은 다른 초점을 향해 반사함을 알 수 있다. 〈증명 끝〉

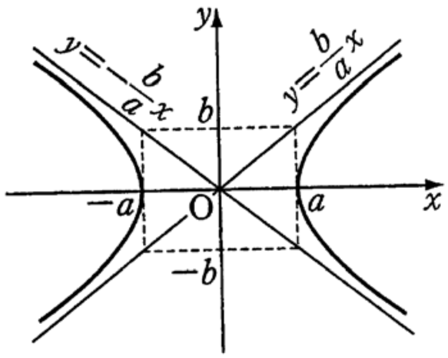
(증명3) 빛이 균일한 매질을 통과할 때에는 최단거리 경로를 따라 진행한다는 성질을 이용한 증명



쌍곡선 밖의 임의의 점을 A라 하면 A에서 쌍곡선 위의 임의의 점 Q를 지나 초점 F'에 이르는 거리 즉, $QA + QF'$의 최솟값은 $PA + PF'$ 임을 보이면 된다.
쌍곡선의 정의에 의해
$PF' - PF = QF' - QF$ 이고
이를 변형하면 $PF' + QF = QF' + PF$ 이다.
양 변에 QA 를 더하면 $QA + PF' + QF = QA + QF' + PF$
그런데 $QA + QF \geq PA + PF$ 이므로
$QA + PF' + QF = QA + QF' + PF \geq PA + PF + PF'$ 이다.
따라서 $QA + QF' \geq PA + PF'$ 이 성립한다. 〈증명 끝〉

(2) 쌍곡선의 기하학적 특성 2

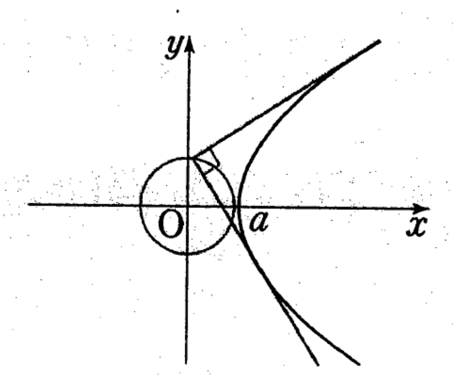
평면 위의 위치에 따라 쌍곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 0개, 1개 또는 2개이다.



① 접선을 그을 수 없는 영역 : 원점, 쌍곡선을 경계로한 반대편의 두 영역
② 접선을 1개 그을 수 있는 영역 : 원점을 제외한 점근선 위의 점, 쌍곡선 위의 점
③ 접선을 2개 그을 수 있는 영역 : 쌍곡선 사이의 영역 중 점근선 위의 점을 제외한 영역

(3) 쌍곡선의 기하학적 특성 3

$x^2+y^2=a^2-b^2$ 에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 에 두 접선을 그으면 두 접선은 수직이 된다. (단, $a>b$ 이며, $x^2+y^2=a^2-b^2$ 와 두 점근선 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 와의 교점은 제외한다.)



(증명1)

쌍곡선 밖의 한 점을 $P(x_1,\ y_1)$ 이라 하면 그 점을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$ 이다. 이 직선이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하므로 대입한 후 x 에 관하여 정리하면 다음과 같다.

$b^2x^2-a^2(mx-mx_1+y_1)^2-a^2b^2=0$

$(a^2m^2-b^2)x^2-2a^2m(-mx_1+y_1)x-a^2\left\{(-mx_1+y_1)^2+b^2\right\}=0$

$a^2m^2-b^2\neq 0$, $D/4=0$ 이므로

$m\neq\pm\dfrac{b}{a}$ 이고

$a^4m^2(-mx_1+y_1)^2+a^2(a^2m^2-b^2)\left\{(-mx_1+y_1)^2+b^2\right\}=0$ 이다.

이를 m 에 관하여 정리하면

$({x_1}^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+{y_1}^2+b^2=0$ 이 된다.

두 직선의 기울기를 곱하면 -1 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\dfrac{{y_1}^2+b^2}{{x_1}^2-a^2}=-1$ 이 성립하고, 이를 정리하면 ${x_1}^2+{y_1}^2=a^2-b^2$ 이 됨을 알 수 있다.

즉 $P(x_1,\ y_1)$ 는 $a>b$ 일 때에만 존재하며, 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{a^2-b^2}$ 인 원 위의 점들이다. 단, $m\neq\dfrac{b}{a}$ 이므로 점근선과의 교점은 제외한다. 〈증명 끝〉

* $a=b$ 일 때(즉, 직각쌍곡선일 때)나 $a<b$ 일 때에는 두 접선의 기울기가 수직인 점이 존재하지 않는다.

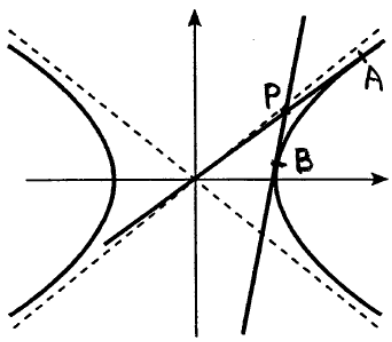
(증명2)

두 접선의 기울기 중 하나를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이다. (단, $m\neq\frac{b}{a}$)

점 $P(x_1,\ y_1)$ 를 접선 위의 한 점이라 하면 $y_1=mx_1\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이 성립하고, 이를 m 에 대해 정리하면 $\left(x_1{}^2-a^2\right)m^2-2x_1y_1m+y_1{}^2+b^2=0$ 이 된다. 두 직선이 수직이므로 $m_1\cdot m_2=-1$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{y_1{}^2+b^2}{x_1^2-a^2}=-1$ 이 성립한다. 이를 정리하면 $x_1{}^2+y_1{}^2=a^2-b^2$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 $P(x_1,\ y_1)$ 는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{a^2-b^2}$ 인 원 위의 점들이다. 단, $a>b$ 이며, 점근선과의 교점은 제외한다. 왜냐면 점근선과 같은 기울기의 접선은 존재하지 않기 때문이다. 〈증명 끝〉

(4) 쌍곡선의 기하학적 특성 4

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 밖의 한 점 $P(x_1,\ y_1)$ 에서 두 접선을 그을 때, 두 접점 $A,\ B$ 를 지나는 직선의 방정식(극선의 방정식)은 $\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=1$ 이다. (단, 점 P 는 점근선 위의 점을 제외한 쌍곡선 사이의 영역 위의 점.)



(증명)

$A,\ B$ 의 좌표를 각각 $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ 라 하면 두 점을 지나는 접선의 방정식은 각각 $\frac{x_2 x}{a^2}-\frac{y_2 y}{b^2}=1$, $\frac{x_3 x}{a^2}-\frac{y_3 y}{b^2}=1$ 이다.

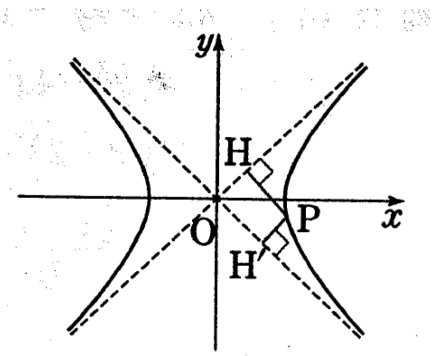
그런데 점 P 는 두 접선의 교점이므로 $\frac{x_2 x_1}{a^2}-\frac{y_2 y_1}{b^2}=1$, $\frac{x_3 x_1}{a^2}-\frac{y_3 y_1}{b^2}=1$ 이 항상 성립한다.

이는 $\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=1$ 이 항상 $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ 를 지난다는 것을 의미한다.

따라서 $\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=1$ 는 두 점 $A,\ B$ 를 지나는 직선의 방정식이다. 〈증명 끝〉

(5) 쌍곡선의 기하학적 특성 5

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 임의의 점 P 에서 두 점근선까지의 거리의 곱은 일정하다.



(증명)

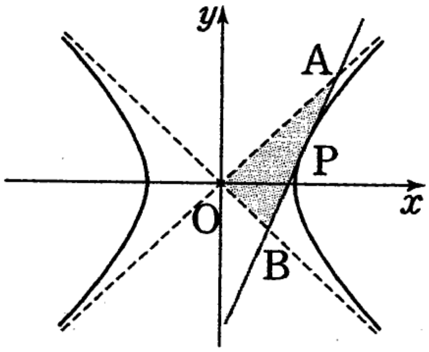
쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 라 하면 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 이고, 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x_1,\ y_1)$ 이라 하면 $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ 이 성립한다. 점 P 에서 점근선에 그은 수선과 점근선과의 교점을 $H,\ H'$ 라 하면 $PH\times PH'$ 이 일정함을 보이면 된다.

$PH=\dfrac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $PH'=\dfrac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이므로

$PH\times PH'=\dfrac{|b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2|}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 이다. 따라서 $PH\times PH'$ 는 일정하다. 〈증명 끝〉

(6) 쌍곡선의 기하학적 특성 6

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P 에서의 접선이 두 점근선과 만나는 교점을 A, B 라 하면 $PA=PB$ 이다.



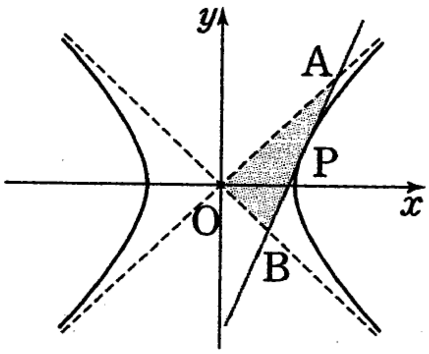
(증명)

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ 이고 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 이다. A, B 의 좌표를 $A(x_2,\ y_2)$, $B(x_3,\ y_3)$ 라 하고 접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ 와 점근선의 방정식 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 를 연립하여 교점 A, B 를 구하면 각각 $(x_2,\ y_2)=\left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ \frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right)$, $(x_3,\ y_3)=\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ \frac{ab^2}{bx_1+ay_1}\right)$ 라 하자.

$PA:PB=|x_2-x_1|:|x_1-x_3|$ 이므로 $x_3,\ x_1,\ x_2$ 가 등차수열을 이룸을 보이면 $PA=PB$ 가 성립함을 알 수 있다. $x_2+x_3=\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}+\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}=\frac{a^2b(2bx_1)}{a^2b^2}=2x_1$ 이 되므로 $x_3,\ x_1,\ x_2$ 는 등차수열을 이루고 $PA=PB$ 가 성립한다. 〈증명 끝〉

(7) 쌍곡선의 기하학적 특성 7

쌍곡선 위의 임의의 점 P 에서의 접선과 두 점근선과의 교점을 A, B 라 하면 $\triangle OAB$의 넓이는 점 P 의 위치에 관계없이 일정하다.



(증명)

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 이고 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ 이 성립한다.

접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ 와 점근선의 방정식 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 를 연립하여 교점 A, B 를 구하면 $A\left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ \frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right)$, $B\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ \frac{ab^2}{bx_1+ay_1}\right)$이다.

$OA=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|bx_1-ay_1|}$, $OB=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|bx_1+ay_1|}$ 이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|bx_1-ay_1|}\cdot\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|bx_1+ay_1|}=\frac{1}{2}\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 이 된다. 따라서 $\triangle OAB$의 넓이는 일정하다. 〈증명 끝〉

(8) 쌍곡선의 기하학적 특성 8

기울기가 일정한 직선이 쌍곡선과 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점의 중점의 자취는 원점을 지나는 직선(의 일부)이다.

(증명)

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 직선의 방정식을 $y=mx+n$, 쌍곡선과 직선의 두 교점을 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, AB의 중점을 $P(x,\ y)$ 라 하자.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$ 를 연립하여 x에 관하여 정리하면

$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(b^2+n^2)=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의해 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2mn}{b^2-a^2m^2}$ $\cdots$ (1)

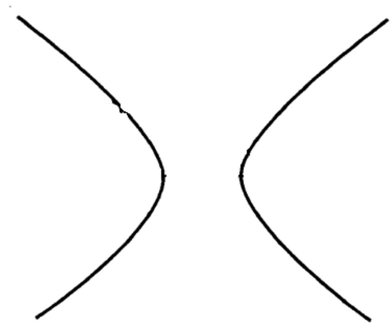
이를 $y=mx+n$ 에 대입하여 정리하면

$y=\frac{a^2m^2n}{b^2-a^2m^2}+n=\frac{b^2n}{b^2-a^2m^2}$ $\cdots$ (2)

(1), (2)에서 $P(x,\ y)$의 자취를 구하면 $y=\frac{b^2}{a^2m}x$ 이다. 따라서 기울기가 일정한 직선이 쌍곡선과 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점의 중점의 자취는 y절편 n의 값에 관계없이 원점을 지나는 직선(그 중, 쌍곡선으로 둘러싸인 부분을 제외한 영역)이 된다. 〈증명 끝〉

(9) 쌍곡선의 기하학적 특성 9

눈금 없는 자와 컴퍼스를 가지고 있을 때, 아래 그림과 같이 주어진 쌍곡선에서 쌍곡선의 중심, 꼭지점 및 주축, 점근선, 그리고 초점을 작도할 수 있다.



① 쌍곡선의 중심

'쌍곡선의 기하학적 성질 8' "기울기가 일정한 직선이 쌍곡선과 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점의 중점의 자취는 원점을 지나는 직선(의 일부)이다."을 이용하여 작도할 수 있다.
쌍곡선에 평행한 직선들을 그어 그 중점을 연결하면 쌍곡선의 중심을 지난다.
이번엔 기울기가 다른 평행한 직선들을 그어 그 중점을 연결하면 역시 쌍곡선의 중심을 지난다.
두 직선의 교점이 쌍곡선의 중심이 된다.

② 꼭지점 및 주축

쌍곡선의 중심에서 쌍곡선과 서로 다른 네 점에서 만나도록 원을 그리고 그 교점을 $P,\ Q,\ R,\ S$라 하면 사각형 $PQRS$는 직사각형이 된다. 사각형 $PQRS$의 네 변의 중점을 잡은 다음 대변의 중점끼리 연결하여 쌍곡선과 만나는 두 점이 쌍곡선의 꼭지점, 두 꼭지점을 연결한 선분이 주축이다.

③ 점근선

쌍곡선의 방정식이 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 일 때, 꼭지점 $A(a,\ 0)$에서 x축에 수직인 직선이 직선 $y=a$와 만나는 점 $B(a,\ a)$를 잡는다. 선분 OB를 반지름으로 하는 원을 그려 x축과의 교점을 점 C라 하면 C의 좌표는 $(\sqrt{2}\,a,\ 0)$이다.

점 C를 지나고 x축에 수직인 직선을 그었을 때 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$와 만나는 점의 y좌표는 b가 된다.
이제 점 $D(a,\ b)$를 작도할 수 있게 되었으므로 원점과 점 $D(a,\ b)$를 잇는 직선을 구하면 점근선 $y=\dfrac{b}{a}x$이 된다.

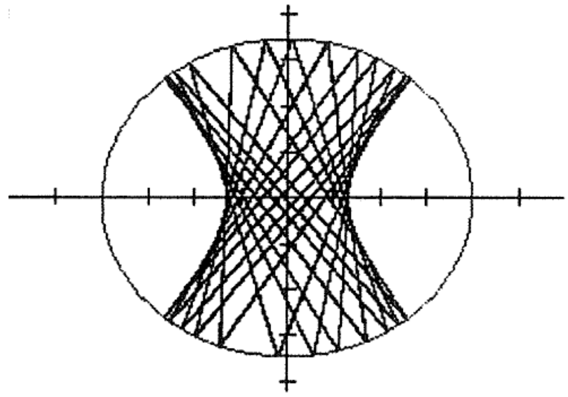
같은 방법으로 또하나의 점근선 $y = -\dfrac{b}{a}x$ 를 작도할 수 있다.

④ 초점

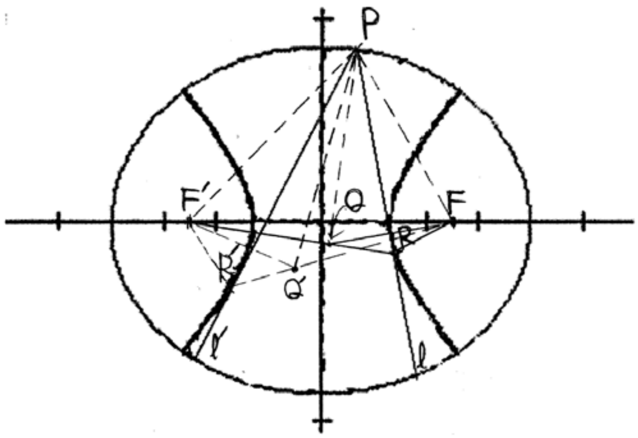
초점의 좌표는 $F(\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ 0)$, $F'(-\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ 0)$ 이다.
따라서, 쌍곡선의 중심 O 를 중심으로 하고 반지름이 OD 인 원을 그리면 x 축과의 교점이 두 개 생기는데, 그 점이 쌍곡선의 초점이다.

(10) 쌍곡선의 기하학적 특성 10

타원의 두 초점 사이에서 출발한 빛이 타원 위의 점에서 반사한 후 그리는 포락선(包絡線, envelope) 타원과 두 초점을 공유하는 쌍곡선이다.



(증명)



위의 타원의 두 초점을 F, F'라 하고 타원 위의 한 점 P에서 반사하는 빛의 경로를 l, l'이라 하자. 그러면 두 초점을 공유하면서 직선 l에 접하는 쌍곡선을 만들 수 있다. 그 쌍곡선을 T라 하자. 그리고 타원과 두 초점을 공유하면서 직선 l'에 접하는 또다른 쌍곡선을 만들 수 있다. 그 쌍곡선을 T'이라 하자. 만약 두 쌍곡선 T, T'이 같다면 타원 위의 임의의 점으로 반사한 빛이 그리는 포락선은 하나의 쌍곡선임을 증명할 수 있다.

두 쌍곡선이 같다는 것을 보이기 위해 $F'R-FR=FR'-F'R'$임을 보이면 된다.

타원과 초점을 공유하면서 직선 l에서 접하는 쌍곡선 위의 접점을 R, 점 F를 직선 l에 대해 대칭이동한 점을 Q라 하면 $FR=RQ$이다.

그러면 $F'R-FR=F'R-RQ$이 성립한다. 그런데 직선 l 위의 임의의 점 S에 대하여 $F'S-SF=F'S-SQ \leq F'R-FR=F'R-RQ$이 성립한다. 따라서 F', Q, R는 일직선 위에 있게 된다.

$\therefore F'R-FR=F'R-RQ=F'Q$이다.

마찬가지 방법으로 생각하면 $FR' - F'R' = FR' - R'Q' = FQ'$ 이 성립함을 알 수 있다.

이제, $F'Q = FQ'$ 임을 보이면 두 쌍곡선이 같은 쌍곡선임이 증명된다.
두 삼각형은 $\triangle PF'Q$, $\triangle PQ'F$은 SAS 합동이다.
왜냐하면 $PF' = PQ'$, $PF = PQ$, $\angle F'PQ = \angle Q'PF$ 이기 때문이다. $\angle F'PQ = \angle Q'PF$ 인 것은 위의 '타원의 기하학적 특성 1'의 "타원의 한 초점에서 출발한 빛은 타원 위의 한 점에서 반사한 후 다른 초점을 향해 진행한다."는 성질을 이용하여 증명된다. 그 성질에 $\angle Q'PR' = \angle R'PF' = \angle F'PR = \angle RPQ$ 이 성립하므로 $\angle F'PQ = \angle Q'PF$ 이다. ('타원의 기하학적 특성 8' 참조)
$\triangle PF'Q = \triangle PQ'F$ 이므로 $F'Q = FQ'$
따라서 타원 위의 점에서 반사한 빛은 두 초점을 공유하는 쌍곡선과 접하게 되고, 쌍곡선 사이와 타원으로 둘러싸인 영역을 끝없이 맴돌게 된다. 〈증명 끝〉